分类号：0175.14　　　　　　　　　　单位代码：10346

密　级：＿＿＿＿　　　　　　　　　　学　　号：Y20100130



硕士学位论文

中文论文题目：三角级数与高阶 Lipschitz 函数类

英文论文题目：Trigonometric Series and Higher Order Lipschitz Classes of Functions

申请人姓名：韩丹丹

指导教师：虞旦盛

专业名称：基础数学

研究方向：函数逼近论

所在学院：理学院

论文提交日期 2013 年 3 月

三角级数与高阶Lipschitz函数类

论文作者签名:________________

指导教师签名:________________

论文评阅人1:________________

评阅人2:________________

评阅人3:________________

评阅人4:________________

评阅人5:________________

答辩委员会主席:________________

委员1:________________

委员2:________________

委员3:________________

委员4:________________

委员5:________________

答辩日期:________________

杭州师范大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作和取得的研究成果，除了文中特别加以标注和致谢之处外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 **杭州师范大学** 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名:　　　　　　　　签字日期:　　年　月　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 **杭州师范大学** 有关保留、使用学位论文的规定。特授权 **杭州师范大学** 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，并采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编以供查阅和借阅。同意学校向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘。（保密的学位论文在解密后适用本授权说明）

学位论文作者签名:　　　　导师签名:

签字日期:　　年　月　日　　　　签字日期:　　年　月　日

致谢

本文是在我的导师虞旦盛老师的精心指导下完成的. 虞老师严谨认真的治学作风, 深厚渊博的专业学识, 睿智敏捷的思维给我深深的影响，让我终生受益. 在生活学习中，虞老师严格要求自己，朴实无华，待人谦卑的人格魅力给过我很多的触动，也促使我在以后的人生道路上要像导师那样脚踏实地，认真做好每件事情。在这里向恩师致以最崇高的敬意和最真挚的感谢. 祝福恩师身体健康，工作顺利，家庭幸福美满。

也感谢我的家人，他们是我坚强的后盾，为我的成长付出了太多的汗水, 是他们无私的奉献, 才使我顺利完成学业. 感谢我的室友朋友们，我们在学习中相互交流，相互学习，相互帮助，共同克服一道道难关。

本论文的顺利完成, 也离不开杭州师范大学理学院的各位领导和老师们的关心, 鼓励和帮助.

最后, 再次对恩师表示深深的谢意！对参加本文评审和答辩的各位专家和老师表示衷心的感谢!

摘要

由于Lipschitz函数类具有许多很好的逼近性质，对Lipschitz函数类的研究一直是逼近论和Fourier分析中的热点问题之一. 特别地，研究一个函数是否属于Lipschitz函数类具有重要的意义. 数学家们利用高阶差分，连续模等工具对Lipschitz函数类进行了许多有意义的推广，并且从实数域推广到了复数域的研究. 本文将讨论三角级数属于高阶一般化的Lipschitz函数类的充分和必要条件.

第一章绪论，对Lipschitz函数类的推广工作以及三角级数属于这些函数类的充分条件和必要条件的研究历史做简要介绍，并介绍本文主要工作.

第二章研究三角级数与高阶Lipschitz函数类的关系.

第三章研究三角级数的导函数与高阶Lipschitz函数类的关系.

第四章研究二重三角级数和高阶Lipschitz函数类的关系. 给出了二重正弦级数，正弦-余弦级数，余弦-正弦级数及二重余弦级数属于高阶Lipschitz函数类的充分条件和必要条件.

本章在第二章的基础上将一元高阶Lipschitz函数类的定义推广到二重高阶Lipschitz函数类. 具体来讲，利用二元函数的 (r,s) 阶差分和二元连续模定义了二元周期函数的高阶Lipschitz函数类 $\Lambda_{r,s}(\omega)$.

第五章研究二重三角级数的偏导函数和高阶Lipschitz函数类的关系. 给出了二重正弦级数，正弦-余弦级数，余弦-正弦级数和二重余弦级数的偏导函数属于高阶Lipschitz函数类的充分条件和必要条件.

关键词： 高阶Lipschitz函数类; 三角级数; 充分必要条件;

Abstract

As we know, functions in lipschitz classes have many good approximation properties. The study of lipschitz classes is always one of the most important topics in approximation theory and fourier analysis . In particular, to test a function whether belongs to lipschitz classes is of very important values. Recently, a lot of mathematicians have made some great progress on generalization of lipschitz classes by applying higher order differences and modulus of continuity . In the present thesis, we devote ourselves to investigate the relations between trigonometric series and the generalized higher order lipschitz classes.

The thesis is organized as follows:

In chapter one, we give a short survey on the study of the Lipschitz classes and our main results.

In chapter two, we study on the relations between the sine, cosine series and the higher order Lipschitz classes.

In chapter three, we study the relations between the derivatives of sine series, cosine series and the higher order Lipschitz classes .

Chapter four, we study the relations between the double trigonometric series and the higher order Lipschitz classes.

Chapter five, we study the relations between the partial derivatives of the double trigonometric series and the higher order Lipschitz classes.

Keywords: Higher order Lipschiz classes; Trigonometric series; Sufficient and necessary condition ;

目次

1 绪论

1.1 研究概述

函数论的一个重要组成部分，涉及的基本问题是函数的近似表示问题。在数学的理论研究和实际应用中经常遇到下列问题: 在选定的一类函数中寻找某个函数g，使它是已知函数f在一定意义下的近似表示，并求出用g近似表示f而产生的误差, 这就是函数逼近问题. 人们常常考虑用一些简单的函数去逼近较为复杂的函数. 研究Lipschitz函数类中函数逼近的性质一直是逼近论研究的热点问题之一.

首先，我们来回顾Lipschitz函数类的定义：

若函数$f(x)\in C(T)$对所有x和t满足

$$|f(x+t)-f(x)|\le C|t|^{\alpha},\quad 0<\alpha\le 1,$$

其中常数C依赖于$f(x)$, 但与x和t无关, 那么我们称$f(x)\in Lip\alpha$.

如果函数$f(x)\in C(T)$, 对x一致成立

$$\lim_{h\to 0}|t|^{-\alpha}\left|f(x+t)-f(x)\right|=0,$$

那么就称$f(x)\in lip\alpha$.

设函数 $\omega(\delta)$ 是定义在 $[0,2\pi]$ 上的递增函数, 并且满足以下条件

$$\begin{aligned}&\omega(0)=0,\\&\omega(\delta_1+\delta_2)\le\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2),\qquad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\delta_1+\delta_2\le 2\pi.\end{aligned}$$

则称 $\omega(\delta)$ 是一个连续模函数.

定义如下函数类:

$$H^{\omega}=\{f(x):|f(x+h)-f(x)|=O(\omega(h)),\quad h>0\}.$$

显然地, 若$\omega(t)=t^{\alpha}$, 那么H^{ω} 即为$Lip\alpha$. 因此H^{ω}为$Lip\alpha$函数类的一个自然推广.

因为Lipschitz函数类中的元素具有很好的性质，所以判断一个函数是否属于Lipschitz函数类是很有意义的问题. 包括匈牙利科学院院士Leindler 教授和Anal. Math. 主编F.Moricz 教授等在内的众多数学家在此方面取得很多有意义的进展.

1948年, Lorentz ([1]) 在正弦级数和余弦级数的系数为单调的条件下给出$f(x) \in Lip\alpha \quad (0<\alpha<1)$ 的充要条件.

定理A. 设$a_n \downarrow 0$ 且a_n 为正弦级数或余弦级数$f(x)$ 的系数. 那么$f(x) \in Lip\alpha \quad (0<\alpha<1)$ 当且仅当$a_n = O(n^{-1-\alpha})$.

1967年, Boas ([2]) 对Lorentz 的结论做了推广, 证明出以下结论:

定理B. 设$a_n \geq 0$ 且a_n 为正弦级数或余弦级数$f(x)$ 的系数. 那么$f(x) \in Lip\alpha \quad (0<\alpha<1)$ 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k = O(n^{1-\alpha}),$$

或等价地

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(n^{-\alpha}).$$

继Boas 和Lorentz之后, 人们对以上问题进行了更为深入的研究. Leindler ([3] 和[4]), Tikhonov([5]) 等在此方面做出许多重要工作.

让$\Omega_\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ 表示由连续模函数$\omega_\alpha(\delta)$组成的集合，其中$\omega_\alpha(\delta)$满足条件:

(A) 对任意的$\alpha' > \alpha$, 存在一个自然数$\mu = \mu(\alpha')$ 使得

$$2^{\mu(\alpha')}\omega_\alpha(2^{-n-\mu}) > 2\omega_\alpha(2^{-n})$$

对所有的自然数n成立;

(B) 对每个自然数ν, 存在一个自然数$N(\nu)$ 使得

$$2^{\nu\alpha}\omega_\alpha(2^{-n-\nu}) \leq 2\omega_\alpha(2^{-n})$$

对一切$n > N(\nu)$成立.

Németh [6] 把定理B 推广到$f \in Lip\omega_\alpha$:

定理C. 设$a_n \geq 0$，且a_n 为正弦级数或余弦级数$f(x)$的系数，$\omega_\alpha \in \Omega_\alpha, 0 < \alpha < 1$, 则$f(x) \in Lip\omega_\alpha$ 当且仅当

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O\left(\omega_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

或等价地

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = O\left(n\omega_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

一个很自然的问题是：如何进一步放宽定理B中对连续模$\omega(\delta)$ 的限制条件. Németh[6] 证明了：

定理D. 设$a_n \geq 0$，且a_n 为正弦级数或余弦级数$f(x)$的系数，则条件

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = O\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

与

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

可推出$f(x) \in H^\omega$.

Tikhonov ([5])考虑了分数阶连续模对Lipscchitz 类做一般化推广.

一个非负序列$\{a_n\}$ 称为几乎递减（递增），如果存在一个常数C使得

$$a_m \leq Ca_n \ (a_m \geq Ca_n) \quad 对所有的m \geq n成立.$$

若存在$\varepsilon \in (0,1)$ 使得$\{n^\varepsilon \gamma_n\}$ 为几乎递减数列, 则记作$\gamma \in SQ$;

若存在$\varepsilon \in (0,\beta)$ 使得$\{n^{\beta-\varepsilon}\gamma_n\}$ 为几乎递增数列, 则记作$\gamma \in SQ_\beta$.

设$\{a_n\}$ 和$\{b_n\}$ 为连续函数$f(x)$ 的Fourier系数. 若对所有正整数m 和n 满足$a_n a_m \geq 0$ 和$b_n b_m \geq 0$, 则称$f(x)$ 属于函数类C_+.

Tikhonov ([5])证明了下列定理E:

定理E. 设$\gamma := \{\gamma_n\}$ 为一非负数列, $\beta > 0$. 如果$\gamma \in SQ$ 且$\gamma \in SQ_\beta$, 那么对任意的$f(x) \in C_+$ 下列条件是等价的:

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = O(\gamma_n),$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^\beta (|a_n| + |b_n|) = O(n^\beta \gamma_n),$$
$$\omega_\beta\left(f, \frac{1}{n}\right) = O(\gamma_n).$$

一般地, $\sum_{k=1}^n ka_k = O(n\omega(\frac{1}{n}))$ 和$\sum_{k=n}^\infty a_k = O(\omega(\frac{1}{n}))$ 都不能单独作为$f(x) \in H^\omega$的充分必要条件(见Németh [6]). 但是, 如果系数序列是单调的, $\omega(\delta)$的限制条件可被适当放宽(见Németh [6]):

定理F. 如果$a_n \downarrow 0$,

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,$$

则$g \in H^\omega$ 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = O\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

最近, 许多数学家致力于三角级数属于多元Lipschitz函数类的充分必要条件的研究. Fülöp ([7] 和[8]), Móricz ([9]), Yu ([10])等都进行了这方面的研究.

给定一个二重非负数列$\{a_{ij}, i, j, = 1, 2, ...\}$, 若a_{ij}满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty, \tag{1.1.1}$$

则下列三角级数(分别被叫作二重正弦级数, 正弦-余弦级数, 余弦-正弦级数和二重余弦级数)

$$f_{11}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \sin jy,$$
$$f_{12}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \cos jy,$$

$$f_{21}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix \sin jy,$$

$$f_{22}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix \cos jy,$$

是一致收敛的, 因此是连续的.

设$\omega(\delta,\eta)$ 为二元连续模函数, 即$\omega(\delta,\eta)$ 为定义在$[0,2\pi]\times[0,2\pi]$上的连续函数, 关于各个变量都是递增的, 且满足下列条件:

$$\begin{aligned}
&\omega(0,0)=0,\\
&\omega(\delta_1+\delta_2,\delta_3)\le\omega(\delta_1,\delta_3)+\omega(\delta_2,\delta_3),\\
&\omega(\delta_1,\delta_2+\delta_3)\le\omega(\delta_1,\delta_2)+\omega(\delta_1,\delta_3).
\end{aligned}$$

利用二元连续模函数Yu [10] 定义了下列二元一般化的Lipschitz函数类:

$$HH^{\omega} := \{f(x,y): \left|\Delta^{1,1}(f;x,y;\delta,\eta)\right| = O(\omega(\delta,\eta))\}.$$

同时他研究了$f_{\alpha\beta}(x,y),\alpha,\beta=1,2,$属于$HH^{\omega}$的充分必要条件. 其主要结论为下列定理G和定理H.

定理G. 如果对$m,n=1,2...$, $\{a_{ij}\}$ 满足下列条件:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ija_{ij} &= O\left(mn\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),\\
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} ia_{ij} &= O\left(m\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),\\
\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} ja_{ij} &= O\left(n\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),\\
\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} &= O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

那么$f_{\alpha\beta}\in HH^{\omega},\alpha,\beta=1,2$.

定理H. 如果$f_{\alpha\beta}\in HH^{\omega},\alpha,\beta=1,2$, 那么,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^{\alpha}j^{\beta}a_{ij} = O\left(m^{\alpha}n^{\beta}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right).$$

设$\mathbf{A} := \{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$为二元实数列. 如果存在一个正常数$\lambda \geq 2$使得对所有$m, n = 1, 2...$成立

$$\sum_{k=m}^{2m} |a_{k,n} - a_{k+1,n}| \leq C(\mathbf{A}) \sum_{k=[\lambda^{-1}m]}^{\lambda m} \frac{|a_{kn}|}{k},$$

$$\sum_{l=m}^{2n} |a_{m,l} - a_{m,l+1}| \leq C(\mathbf{A}) \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{\lambda n} \frac{|a_{ml}|}{l},$$

$$\sum_{k=m}^{2m}\sum_{l=m}^{2n} |a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1}| \leq C(\mathbf{A}) \sum_{k=[\lambda^{-1}m]}^{\lambda m}\sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{\lambda n} \frac{|a_{kl}|}{kl},$$

其中$C(\mathbf{A})$为仅依赖于$\mathbf{A}$的正常数, 则我们说$\mathbf{A}$为均值有界变差二重数列, 记作: $\{a_{mn}\} \in MVBVDS$.

Yu ([10]) 给出了$f_{11} \in HH^{\omega}$的充要条件.

定理I. 设$\{a_{ij}\}$为非负二重数列且$\{a_{ij}\} \in MVBVDS$, 则$f_{11} \in HH^{\omega}$当且仅当

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ija_{ij} = O\left(mn\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right).$$

Fülöp ([7]) 定义了二元Zygmund函数类$\Lambda_*(2)$和$\lambda_*(2)$:

$$\Lambda_*(2) := \left\{f(x,y) : |\Delta^{2,2}(f;x,y;h,k)| \leq Khk, \quad h > 0, k > 0\right\},$$

$$\lambda_*(2) := \left\{f(x,y) : \lim_{h\to 0, k\to 0} h^{-1}k^{-1}|\Delta^{2,2}(f;x,y;h,k)| = 0, \quad h > 0, k > 0\right\},$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta^{2,2}(f;x,y;h,k) := &f(x+h,y+k) + f(x-h,y+k) + f(x+h,y-k) + f(x-h,y-k) \\ &- 2f(x,y+k) - 2f(x,y-k) - 2f(x+h,y) - 2f(x-h,y) + 4f(x,y).\end{aligned}$$

Fülöp([7])研究了二重三角级数属于二元Zygmund函数类$\Lambda_*(2)$和$\lambda_*(2)$的充要条件, 事实上, 他建立了

定理J. 设$\{a_{ij}; i, j, = 1, 2, ...\}$是一个二元非负数列且满足*(1.1.1)*, 则

(1) $f_{pq} \in \Lambda_*(2), p, q = 1, 2,$ 当且仅当

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O\left(\frac{1}{mn}\right), \qquad m, n = 1, 2, ...$$

(2) $f_{pq} \in \lambda_*(2), p, q, = 1, 2,$ 当且仅当

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = o\left(\frac{1}{mn}\right), \qquad m, n \to \infty.$$

Guo和Yu([11])将$\Lambda_*(2)$和$\lambda_*(2)$推广到下列一般化的Zygmund 函数类$\Lambda_{2,2}(\omega)$和$\lambda_{2,2}(\omega)$:

$$\Lambda_{2,2}(\omega) := \left\{f : |\Delta^{2,2}(f;x,y;h,k)| = O\left(\omega(h,k)\right) \quad h>0, k>0\right\},$$
$$\lambda_{2,2}(\omega) := \left\{f : |\Delta^{2,2}(f;x,y;h,k)| = o\left(\omega(h,k)\right) \quad h>0, k>0\right\}.$$

显然, 当$\omega(h,k) = hk$时, $\Lambda_{2,2}(\omega)$和$\lambda_{2,2}(\omega)$即为$\Lambda_*(2)$和$\lambda_*(2)$. 他们建立了

定理K. 如果

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2a_{ij} = O\left(m^2n^2\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} i^2a_{ij} = O\left(m^2\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} j^2a_{ij} = O\left(n^2\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} = O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$

那么$f_{pq}(x,y) \in \Lambda_{2,2}(\omega), p,q=1,2.$

下面的定理则给出了$f_{pq}(x,y) \in \Lambda_{2,2}(\omega), p,q=1,2$的必要条件.

定理L. 如果$f_{pq}(x,y) \in \Lambda_{2,2}(\omega), p,q=1,2$, 那么有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^{\beta(p)}j^{\gamma(q)}a_{ij} = O\left(m^{\beta(p)}n^{\gamma(q)}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$

其中$\beta(1)=3, \beta(2)=2.$

如果对$\omega(u,v)$附加一些条件, 便得到$f_{pq}(x,y) \in \Lambda_{2,2}(\omega), p,q=1,2$的充要条件(见[11]).

1.2 本文工作

在前人研究结果的基础上, 我们继续研究三角级数及其导数属于高阶一般化的Lipschitz函数类的充分必要条件.

具体而言：

(1) 通过研究正弦、余弦级数的系数，给出三角级数属于高阶一般化的Lipschitz函数类$\Lambda_r(\omega)$和$\lambda_r(\omega)$的充分条件和必要条件.

(2) 研究正弦、余弦级数的各阶导函数与高阶Lipschitz函数类的关系.

(3) 给出二重三角级数属于二元高阶一般化的Lipschitz函数类$\Lambda_{r,s}(\omega)$和$\lambda_{r,s}(\omega)$的充分条件和必要条件.

(4) 研究二重三角级数的偏导函数和高阶Lipschitz函数类关系.

2 三角级数与高阶Lipschitz函数类的关系

2.1 引言

给定一个非负序列$\{a_k\}$满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty, \tag{2.1.1}$$

则下列三角级数（分别为正弦级数和余弦级数）

$$f_1(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,$$

$$f_2(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

是一致收敛的，因此是连续的.

对$f(x) \in C(T)$, $r = 1, 2, ...$, $f(x)$在x 处步长为u的r阶差分定义如下

$$\triangle^r(f; x; u) := \sum_{\mu=0}^{r} (-1)^{r-\mu} \binom{r}{\mu} f(x + \mu u)$$

Móricz[12]定义高阶Lipscchitz 类$\Lambda_r(\alpha)$ 和$\lambda_r(\alpha)$ 如下:

$$\Lambda_r(\alpha) := \{f : \omega_r(f; \eta) = O(\eta^\alpha), \quad \eta > 0\},$$

$$\lambda_r(\alpha) := \{f : \lim_{\eta \to 0} \eta^{-\alpha} \omega_r(f; \eta) = 0, \quad \eta > 0\},$$

其中

$$\omega_r(f; \eta) := \sup_{0 < u \leq \eta} \max_{x \in T} |\triangle^r(f; x; u)|, \quad \eta > 0,$$

为$f(x)$的r 阶光滑模.

Guo, Wei和Yu([13])借助连续模的形式推广高阶Lipscchitz 函数类$\Lambda_r(\alpha)$ 和$\lambda_r(\alpha)$

$$\Lambda_r(\omega) := \{f : \omega_r(f, \eta) = O(\omega(\eta)), \eta > 0\},$$

$$\lambda_r(\omega) := \{f : \omega_r(f, \eta) = o(\omega(\eta)), \eta > 0\}.$$

设 $\{c_k : k \in Z\}$ 是一复数列, 记作 $\{c_k\} \subset C$, 如果

$$\sum_{k \in Z} |c_k| < \infty, \tag{2.1.2}$$

那么三角级数

$$\sum_{k\in Z} c_k e^{ikx} =: f(x), \qquad x \in T := [-\pi, \pi), \tag{2.1.3}$$

是一致收敛的.

Guo, Wei和Yu([13])建立如下结果:

定理2.1.1 *(1)* 设 $r = 1, 2, \ldots$. 若 $\{c_k\} \subset C$ 满足

$$\sum_{|k|\le n} |k^r c_k| = O\left(n^r \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.1.4}$$

$$\sum_{|k|>n} |c_k| = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.1.5}$$

则 $f(x) \in \Lambda_r(\omega)$.

(2) 设 $\{c_k\}$ 是一实数列, 且对所有 k 成立 $k^r c_k \ge 0$. 若 $\omega(t)$ 满足

$$\sum_{i=n}^{\infty} i^{-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.6}$$

则 $f(x) \in \Lambda_r(\omega)$ 的充分必要条件是 (2.1.4) 式成立.

定理2.1.2 *(1)* 设$r = 1, 2, \ldots$, 若 $\{c_k\} \subset C$ 满足

$$\sum_{|k|\le n} |k^r c_k| = o\left(n^r \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.1.7}$$

$$\sum_{|k|>n} |c_k| = o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.1.8}$$

则 $f(x) \in \lambda_r(\omega)$.

(2) 设 $\{c_k\}$ 是一实数列, 且对所有k成立$k^r c_k \ge 0$. 若 $\omega(t)$ 满足

$$\sum_{i=n}^{\infty} i^{-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.9}$$

则 $f(x) \in \lambda_r(\omega)$ 的充分必要条件是*(2.1.7)*式成立.

本节, 我们将研究正弦级数和余弦级数属于$\Lambda_r(\omega)$ 和$\lambda_r(\omega)$ 的充分必要条件.

2.2 主要结果

下文中, 总是假定$\{a_k\}$ 是满足条件(2.1.1)的非负序列. 首先给出$f_p(x) \in \Lambda_r(\omega), p = 1, 2$ 的充分条件.

定理2.2.1 若对$n=1,2...$成立

$$\sum_{k=1}^{n} k^r a_k = O\left(n^r \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), n=1,2... \tag{2.2.1}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), n=1,2... \tag{2.2.2}$$

则$f_p(x)\in\Lambda_r(\omega), p=1,2.$

我们有如下$f_p(x)\in\Lambda_r(\omega), p=1,2$ 的必要条件.

定理2.2.2 若$f_p(x)\in\Lambda_r(\omega), p=1,2,$ 则

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\beta(r,p)} a_k = O\left(n^{\beta(r,p)} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

其中

$$\begin{cases}\beta(r,1)=r, & r \text{ 为奇数},\\ \beta(r,1)=r+1, & r \text{ 为偶数},\end{cases} \quad \begin{cases}\beta(r,2)=r+1, & r \text{ 为奇数},\\ \beta(r,2)=r, & r \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

如果$\omega(\delta)$ 满足一些附加条件, 我们可以获得$f_p(x)\in\Lambda_r(\omega), p=1,2$ 的充要条件. 事实上, 我们有如下定理

定理2.2.3 (i). 若r 为奇数, $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 满足

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1} \omega\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.2.3}$$

则$f_1(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.1)成立.

(ii). 若r 为偶数, $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r-1} \omega\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(n^r \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.2.4}$$

则$f_1(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.2)成立.

(iii). 若r 为奇数, $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 满足(2.2.4), 则$f_2(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.2)成立.

(iv). 若r 为偶数, $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 满足(2.2.3), 则$f_2(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.1) 成立.

现在，我们给出定理2.2.3的一些有用推论.

推论2.2.1 (i). 假设存在μ_1 $(\mu_1>0)$ 使得$\{m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\}$ 几乎递减. 若r 为奇数，则$f_1(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.1) 成立.

(ii). 假定存在μ_2 $(0<\mu_2<r)$ 使得$\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\}$ 几乎递增. 若r 为偶数，则$f_1(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.2) 成立.

(iii). 假定存在μ_3 $(0<\mu_3<r)$使得$\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\}$几乎递增. 若$r$ 为奇数，则$f_2(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.2) 成立.

(iv). 假定存在μ_4 $(\mu_4>0)$ 使得$\{m^{\mu_4}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\}$ 几乎递减. 若r 为偶数，则$f_2(x)\in\Lambda_r(\omega)$ 当且仅当(2.2.1) 成立.

推论2.2.2 (i). 若r 为奇数，则$f_1\in\Lambda_r(\alpha)\,(0<\alpha\le r)$ 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{m}k^r a_k=O(m^{r-\alpha}). \tag{2.2.5}$$

(ii). 若r 为偶数，则$f_1\in\Lambda_r(\alpha)\,(0<\alpha<r)$ 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=O(m^{-\alpha}). \tag{2.2.6}$$

(iii). 若r 为奇数，则$f_2\in\Lambda_r(\alpha)\,(0<\alpha<r)$ 当且仅当(2.2.6) 成立.

(iv). 若r 为偶数，则$f_2\in\Lambda_r(\alpha)\,(0<\alpha\le r)$ 当且仅当(2.2.5) 成立.

注1 .当'O' 被'o'代替，$\Lambda_r(\omega)$ 被$\lambda_r(\omega)$代替，定理2.2.1-定理2.2.3, 推论2.2.1 和推论2.2.2 仍然成立.

2.3 引理

引理2.3.1 当$r=2m, m=1,2...$时，有

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\cos k(x+jh)=2^m(\cos kh-1)^m\cos k(x+mh), \tag{2.3.1}$$

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\sin k(x+jh)=2^m(\cos kh-1)^m\sin k(x+mh). \tag{2.3.2}$$

当$r=2m-1, m=1,2,...$时, 有

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\cos k(x+jh)=-2^m(\cos kh-1)^{m-1}\sin k(x+mh-\frac{h}{2})\sin\frac{kh}{2}, \tag{2.3.3}$$

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\sin k(x+jh)=2^m(\cos kh-1)^{m-1}\cos k(x+mh-\frac{h}{2})\sin\frac{kh}{2}. \tag{2.3.4}$$

证明: 首先, 我们有Móricz ([12]): 对$m=1,2,...,\ t\in R$, 有

$$S_{2m-1}:=\sum_{j=0}^{2m-1}(-1)^j\binom{2m-1}{j}e^{i(m-j)t}=2^{m-1}(\cos t-1)^{m-1}(e^{it}-1), \tag{2.3.5}$$

和

$$S_{2m}:=\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}e^{i(m-j)t}=2^m(\cos t-1)^m. \tag{2.3.6}$$

当$r=2m$, 由(2.3.6), 得

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\cos k(x+jh)&=Re\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e^{ik(x+jh)}\\&=Re\left(\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}e^{i(m-j)(-kh)}e^{i(mkh+kx)}\right)\\&=2^m(\cos kh-1)^m Re\left(e^{i(mkh+kx)}\right)\\&=2^m(\cos kh-1)^m\cos k(x+mh),\end{aligned}$$

这就证得(2.3.1).

类似地, 可得(2.3.2) (通过虚部代替实部).

当$r=2m-1$, 由(2.3.5), 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\cos k(x+jh) &= Re\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e^{ik(x+jh)}\\ &= Re\left(\sum_{j=0}^{2m-1}(-1)^{j}\binom{2m-1}{j}e^{i(m-j)(-kh)}e^{i(mkh+kx)}\right)\\ &= 2^{m-1}(\cos kh-1)^{m-1}Re\left((e^{i(-kh)}-1)e^{i(kx+mh)}\right)\\ &= 2^{m-1}(\cos kh-1)^{m-1}Re\left(e^{i(kx-kh+mkh)}-e^{i(kx+mkh)}\right)\\ &= 2^{m-1}(\cos kh-1)^{m-1}\left(\cos(kx-kh+mkh)-\cos(kx+mkh)\right)\\ &= -2^{m}(\cos kh-1)^{m-1}\sin k(x+mh-\frac{h}{2})\sin\frac{kh}{2}\end{aligned}$$

这就证得(2.3.3).

类似可得(2.3.4).

引理2.3.2 若$\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 满足(2.2.5)，则对任意$\delta\geq r$, 由(2.2.2)可推出

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\delta}a_k=O\left(n^{\delta}\omega(\frac{1}{n})\right). \tag{2.3.7}$$

证明: 让N 为整数, 对$1\leq n<N$, 由Abel's 变换, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^{\delta}a_k &= \sum_{k_1=1}^{n}\left(k_1^{\delta}-(k_1-1)^{\delta}\right)\sum_{k=k_1}^{N}a_k-n^k\sum_{k=n+1}^{N}a_k\\ &\leq \sum_{k_1=1}^{n}\delta k_1^{\delta-1}\sum_{i=k_1}^{N}a_k.\end{aligned}$$

让N 趋于∞, 由(2.2.2) 和(2.2.5), 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^{\delta}a_k &= O\left(\sum_{k_1=1}^{n}k_1^{\delta-1}\omega\left(\frac{1}{k_1}\right)\right)\\ &= O\left(n^{\delta-r}\sum_{k_1=1}^{n}k_1^{r-1}\omega\left(\frac{1}{k_1}\right)\right)\\ &= O\left(n^{\delta}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

这就证得(2.3.7).

引理2.3.3 若$\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 满足(2.2.4), 则对任意$\delta\geq r$, 由(2.3.7) 可推出(2.2.2).

证明: 让N 为整数, 对$2 \le n < N$, 由Abel 变换和(2.3.7), 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{N} k^{-\delta}\left(k^{\delta}a_k\right) &= -\frac{1}{n^{\delta}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{\delta}a_k + \sum_{k_1=n}^{N-1}\left(\frac{1}{k_1^{\delta}} - \frac{1}{(k_1+1)^{\delta}}\right)\sum_{k=1}^{k_1}k^{\delta}a_k + \frac{1}{N^{\delta}}\sum_{k=1}^{N}k^{\delta}a_k \\ &= O(\sum_{k_1=n}^{N-1}\frac{1}{k_1^{\delta+1}}\sum_{k=1}^{k_1}k^{\delta}a_k) + \frac{1}{N^{\delta}}\sum_{k=1}^{N}k^{\delta}a_k \\ &= O\left(\sum_{k_1=n}^{N-1}\frac{1}{k_1}\omega\left(\frac{1}{k_1}\right) + \omega\left(\frac{1}{N}\right)\right).\end{aligned}$$

让N 趋于∞, 由(2.2.4)即得到(2.2.2).

2.4 结论的证明

定理2.2.1的证明: 记$m := \left[\frac{1}{h}\right]$ 对给定的$h > 0$, 直接算得

$$\begin{aligned}|\Delta^r(f_1;x;h)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\sin k(x+jh)\right| \\ &\le \left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{ikx}(1-e^{ikh})^r\right| \\ &\le 2^r\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left|\sin\frac{kh}{2}\right|^r \\ &= 2^r(\sum_{k=1}^{m} + \sum_{k=m+1}^{\infty})a_k\left|\sin\frac{kh}{2}\right|^r = s_1 + s_2.\end{aligned}$$

由(2.2.1), 有

$$s_1 \le h^r\sum_{k=1}^{m}k^r a_k = O\left(\omega(h)\right).$$

由(2.2.2), 有

$$s_2 \le 2^r\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k = O\left(\omega(h)\right).$$

综合以上两点, 证得$f_1(x) \in \Lambda_r(\omega)$.

类似地, 可证$f_2(x) \in \Lambda_r(\omega)$.

定理2.2.2的证明: 我们通过考虑以下情况来证

(i). r 为偶数, 记$r = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$. 因为$f_1(x) \in \Lambda_r(\omega)$, 则存在一常数使得

$$|\Delta^r(f_1;x;h)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\sin k(x+jh)\right| \le C\omega(h), h > 0.$$

由(2.3.2), 得

$$\begin{aligned}|\Delta^{2m}(f_1;x;h)| &= 2^m\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\cos kh-1)^m\sin k(x+mh)\right|\\ &= 2^{2m}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\sin\frac{kh}{2})^{2m}\sin k(x+mh)\right|\\ &\le C\omega(h), h>0.\end{aligned}$$

既然f_1 是一致收敛的, 可对上式两边关于x 在$(-mh,-mh+h)$ 上进行积分, 得到

$$\begin{aligned}2^{2m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\sin^{2m+2}\frac{kh}{2} &= \left|\int_{-mh}^{-mh+h}\Delta^{2m}(f_1;x;h)dx\right|\\ &\le \int_{-mh}^{-mh+h}\left|\Delta^{2m}(f_1;x;h)\right|dxdy\\ &\le C\int_{-mh}^{-mh+h}\omega(h)dx\\ &\le Ch\omega(h), \qquad h>0. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

由著名不等式

$$\sin t\ge\frac{2t}{\pi}, \qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2}, \tag{2.4.2}$$

和(2.4.1), 可得

$$2^{2m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\left(\frac{kh}{2}\right)^{2m+2}\le Ch\omega(h), \qquad h>0,$$

其中$n:=\left[\frac{1}{h}\right]$. 因此,

$$\sum_{k=1}^{n}k^{r+1}a_k=O\left(n^{r+1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

这就证得定理2.2.2 中$p=1$, r 为偶数时的情形.

(ii) . r 为奇数, 记$r=2m-1$, $m=1,2,\ldots$. 因为$f_1(x)\in\Lambda_r(\omega)$, 由(2.3.4), 存

在一常数C使得

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta^{2m-1}(f_1;x;h)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \binom{2m-1}{j} \sin k(x+jh)\right| \\
&= 2^m \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k (1-\cos kh)^{m-1} \cos k(x+(m-\frac{h}{2})h) \sin\frac{kh}{2}\right| \\
&= 2^{2m} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k (\sin\frac{kh}{2})^{2m-1} \cos k(x+(m-\frac{1}{2})h)\right| \\
&\le C\omega(h), h>0. \qquad (2.4.3)
\end{aligned}
$$

既然f_1 一致收敛, 对(2.4.3) 两边关于x 在$(-mh,-mh+\frac{1}{2}h)$ 上进行积分，得到

$$
\begin{aligned}
2^{2m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\sin^{2m}\frac{kh}{2} &= \left|\int_{-mh}^{-mh+\frac{1}{2}h} \Delta^{2m}(f_1;x;h)dx\right| \\
&\le \int_{-mh}^{-mh+\frac{1}{2}h} \left|\Delta^{2m}(f_1;x;h)\right| dxdy \\
&\le C\int_{-mh}^{-mh+\frac{1}{2}h} \omega(h)dx \\
&\le Ch\omega(h), \qquad h>0. \qquad (2.4.4)
\end{aligned}
$$

由(2.4.2) 和(2.4.4), 有

$$
2^{2m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\left(\frac{kh}{2}\right)^{2m} \le Ch\omega(h), \qquad h>0,
$$

其中$n:=\left[\frac{1}{h}\right]$. 因此,

$$
\sum_{k=1}^{n} k^r a_k = O\left(n^r\omega(\frac{1}{n})\right).
$$

这就证得定理2.2.2 中$p=1$, r 为奇数时的情形.

(iii). r 为偶数, 记$r=2m$, $m_0=1,2,\ldots.$ 因为$f_2(x)\in\Lambda_r(\omega)$, 由(2.3.1), 则存在一常数C使得

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta^{2m}(f_2;x,h)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} \cos k(x+jh)\right| \\
&= \left|2^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k (1-\cos kh)^m \cos k(x+mh)\right| \\
&\le C\omega(h).
\end{aligned}
$$

$$|\triangle^{2m}(f_2;-mh;h)|=2^{2m}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m}\leq C\omega(h),$$

由(2.4.2), 有

$$\sum_{k=1}^{n}k^{2m}a_k=\frac{O(\omega(h))}{h^{2m}},$$

其中$n:=[\frac{1}{h}]$, 因此

$$\sum_{k=1}^{n}k^{r}a_k=O\left(n^{r}\omega(\frac{1}{n})\right).$$

这就证得定理2.2.2 中$p=2$, r 为偶数时的情形.

(iv). r 为奇数, 记$r=2m-1$, $m=1,2,\ldots.$ 因为$f_2(x)\in\Lambda_r(\omega)$, 由(2.3.3), 存在一常数C使得$C$ 使得

$$\begin{aligned}|\triangle^{2m-1}(f_2;x,h)|&=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{j=0}^{2m-1}(-1)^j\binom{2m-1}{j}\cos k(x+jh)\right|\\&=\left|2^m\sum_{k=1}^{\infty}a_k(1-\cos kh)^{m-1}\sin k(x+mh-\frac{h}{2})\sin\frac{kh}{2}\right|\\&\leq C\omega(h).\end{aligned}$$

从而

$$\left|\triangle^{2m-1}(f_2;-mh;h)\right|=2^{2m-1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m}\leq C\omega(h),$$

由(2.4.2), 有

$$\sum_{k=1}^{n}k^{2m}a_k=\frac{O(\omega(h))}{h^{2m}},$$

其中$n:=[\frac{1}{h}]$, 因此

$$\sum_{k=1}^{n}k^{r+1}a_k=O\left(n^{r+1}\omega(\frac{1}{n})\right).$$

这就证得定理2.2.2 中$p=2$, r 为奇数时的情形.

定理2.2.3的证明: (i). 必要性由定理2.2.2 得出, 充分性由引理2.3.3(取$\delta=r$)和定理2.2.1得出.

(ii). 必要性由定理2.2.2 和引理2.3.3(取$\delta=r+1$)得出, 充分性由引理2.3.2(取$\delta=r$) 和定理2.2.1得出.

(iii). 必要性由定理2.2.2 和引理2.3.3(取$\delta = r+1$)得出, 充分性由引理2.3.2(取$\delta = r$) 和定理2.2.1得出.

(iv). 必要性由定理2.2.2得出, 充分性由引理2.3.3(取$\delta = r$) 和定理2.2.1得出.

推论2.2.1的证明: 我们只证明(i)和(ii), (iii) 和(iv)的证明是类似的.

(i). 如果存在$\mu_1(0<\mu_1)$ 使得$\left\{m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right\}$对$m$几乎递减，则

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k}\omega\left(\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\mu_1}}\left(k^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\
&= O\left(m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\mu_1}}\right)\\
&= O\left(\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right),
\end{aligned}
$$

因此，推论2.2.1的(i)由定理2.2.3的(i)得出.

(ii). 如果存在μ_2 $(0<\mu_2<r)$使得$\left\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right\}$ 对m几乎递增，则

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}k^{r-1}\omega\left(\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{m}k^{r-1-\mu_2}(k^{\mu_2}\omega(\frac{1}{k}))\\
&= O\left(m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{k=1}^{m}k^{r-1-\mu_2}\right)\\
&= O(m^{r}\omega(\frac{1}{m}))
\end{aligned}
$$

推论2.2.1的(ii)由定理2.2.3的(ii)得出.

推论2.2.2的证明: 设

$$\omega(u) = u^{\alpha}, \alpha > 0.$$

则$\omega(u)$ 在推论2.2.2.中基于参数α的假设满足定理2.2.3的条件. 因此，推论2.2.2由定理2.2.3得出.

3 正弦、余弦级数的导数与高阶Lipschitz函数类的关系

3.1 主要结果

对上一章中的f_1, f_2, 若$\{a_k\}$满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k < \infty, \tag{3.1.1}$$

它们的s阶导数

$$f_1^{(s)}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k \sin(kx + \frac{s\pi}{2}),$$
$$f_2^{(s)}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k \cos(kx + \frac{s\pi}{2}),$$

是一致收敛的，因此是连续的

下文中，总是假定$\{a_k\}$ 是满足条件(3.1.1)的非负序列. 若$f^{(s)}(x) \in \Lambda_r(\omega)$, 我们称$f(x) \in W^s\Lambda_r(\omega)$. 下面给出$f_p(x) \in W^s\Lambda_r(\omega), p = 1, 2$的充分条件.

定理3.1.1 若对$n = 1, 2...$成立

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r+s} a_k = O\left(n^r \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.1.2}$$
$$\sum_{k=n}^{\infty} k^s a_k = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.1.3}$$

则$f_p(x) \in W^s\Lambda_r(\omega), p = 1, 2$.

我们有如下$f_p(x) \in W^s\Lambda_r(\omega), p = 1, 2$ 的必要条件.

定理3.1.2 若$f_1(x) \in W^s\Lambda_r(\omega)$, 则

(i). 当r为偶数, s为奇数时, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r+s} a_k = O\left(n^r \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.1.4}$$

(ii). 当r为奇数, s为奇数时, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r+s+1} a_k = O\left(n^{r+1} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.1.5}$$

(iii). 当r为偶数, s为偶数时, 则有(3.1.5)成立.

(iii). 当r为奇数, s为偶数时, 则有(3.1.4)成立.

定理3.1.3 若$f_2(x)\in W^s\Lambda_r(\omega)$, 则

(i). 当r为奇数, s为奇数时, 则有(3.1.4)成立.

(ii). 当r为偶数, s为奇数时, 则有(3.1.5)成立.

(iii). 当r为偶数, s为偶数时, 则有(3.1.4)成立.

(iv). 当r为奇数, s为偶数时, 则有(3.1.5)成立.

3.2 结论的证明

定理3.1.1的证明: 记$m:=\left[\frac{1}{h}\right]$ 对给定的$h>0$，直接算得

$$
\begin{aligned}
|\triangle^r(f_1^{(s)};x;h)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}k^s a_k\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\sin\left(k(x+jh)+\frac{s\pi}{2}\right)\right| \\
&\le \left|\sum_{k=1}^{\infty}k^s a_k e^{ikx}(1-e^{ikh})^r\right| \\
&\le 2^r\sum_{k=1}^{\infty}k^s a_k\left|\sin\frac{kh}{2}\right|^r \\
&= 2^r\Big(\sum_{k=1}^{m}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\Big)k^s a_k\left|\sin\frac{kh}{2}\right|^r = s_1+s_2.
\end{aligned}
$$

由(2.1.1), 有

$$
s_1\le h^r\sum_{k=1}^{m}k^{r+s}a_k=O\left(\omega(h)\right).
$$

由(2.1.2), 有

$$
s_2\le 2^r\sum_{k=m+1}^{\infty}k^s a_k=O\left(\omega(h)\right).
$$

综合以上两点, 证得$f_1(x)\in W^s\Lambda_r(\omega)$.

类似地，可证$f_2(x) \in W^s\Lambda_r(\omega)$.

定理3.1.2的证明: 我们通过考虑以下情况来证

(i). r 为偶数，s 为奇数，记$r = 2m$，$s = 2n-1$，$m,n = 1,2,....$ 因为$f_1^{(s)} \in \Lambda_r(\omega)$，由(2.3.1)，则存在一常数使得

$$
\begin{aligned}
|\triangle^{2m}(f_1^{(s)};x;h)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} \cos k(x+jh)\right| \\
&= \left|2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k (1-\cos kh)^m \cos k(x+mh)\right| \\
&\le C\omega(h).
\end{aligned}
$$

从而，

$$
|\triangle^{2m}(f_1^{(s)};-mh;h)| = 2^{2m} \sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k \left(\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m} \le C\omega(h).
$$

由(2.4.2)，有

$$
\sum_{k=1}^{n} k^{2m} k^s a_k = \frac{O(\omega(h))}{h^{2m}},
$$

其中$n := [\frac{1}{h}]$，因此

$$
\sum_{k=1}^{n} k^{r+s} a_k = O\left(n^r \omega(\frac{1}{n})\right).
$$

(ii). r 为奇数，s 为奇数，记$r = 2m-1$，$s = 2n-1$，$m,n = 1,2,....$ 因为$f_1^{(s)} \in \Lambda_r(\omega)$，由(2.3.3)，存在一常数使得$C$ 使得

$$
\begin{aligned}
|\triangle^{2m-1}(f_1^{(s)};x,h)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \binom{2m-1}{j} \cos k(x+jh)\right| \\
&= \left|2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k (1-\cos kh)^{m-1} \sin k(x+mh-\frac{h}{2}) \sin\frac{kh}{2}\right| \\
&\le C\omega(h).
\end{aligned}
$$

从而，

$$
|\triangle^{2m-1}(f_1^{(s)};-mh;h)| = 2^{2m-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k (\sin\frac{kh}{2})^{2m} \le C\omega(h),
$$

由(2.4.2)，有

$$
\sum_{k=1}^{n} k^{2m} k^s a_k = \frac{O(\omega(h))}{h^{2m}}.
$$

其中$n := [\frac{1}{h}]$, 因此

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r+s+1}a_k = O\left(n^{r+1}\omega(\frac{1}{n})\right).$$

(iii). r 和s都为偶数, 记$r = 2m$, $s = 2n$, $m, n = 1, 2, ...$ 因为$f_1^{(s)} \in \Lambda_r(\omega)$, 则存在一常数使得

$$|\Delta^r(f_1^{(s)}; x; h)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r}{j} \sin k(x + jh)\right| \leq C\omega(h), h > 0.$$

由(2.3.2), 得

$$\begin{aligned}|\Delta^{2m}(f_1^{(s)}; x; h)| &= 2^m \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k (\cos kh - 1)^m \sin k(x + mh)\right| \\ &= 2^{2m} \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k (\sin \frac{kh}{2})^{2m} \sin k(x + mh)\right| \\ &\leq C\omega(h), h > 0.\end{aligned}$$

既然$f_1^{(s)}$ 是一致收敛的, 可对上式两边关于x 在$(-mh, -mh + h)$ 上进行积分, 得到

$$\begin{aligned}2^{2m} \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} a_k \sin^{2m+2} \frac{kh}{2} &= \left|\int_{-mh}^{-mh+h} \Delta^{2m}(f_1^{(s)}; x; h) dx\right| \\ &\leq \int_{-mh}^{-mh+h} \left|\Delta^{2m}(f_1^{(s)}; x; h)\right| dxdy \\ &\leq C \int_{-mh}^{-mh+h} \omega(h) dx \\ &\leq Ch\omega(h), \qquad h > 0. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

由(2.4.2)和(3.2.1), 可得

$$2^{2m} \sum_{k=1}^{n} k^{s-1} a_k \left(\frac{kh}{2}\right)^{2m+2} \leq Ch\omega(h), \qquad h > 0,$$

其中$n := [\frac{1}{h}]$. 因此,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r+s+1} a_k = O\left(n^{r+1} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

(iv). r 为奇数, s 为偶数, 记$r = 2m - 1$, $s = 2n$, $m, n = 1, 2, ...$ 因

为$f_1^{(s)} \in \Lambda_r(\omega)$, 由(2.3.4), 存在一常数使得

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta^{2m-1}(f_1^{(s)};x;h)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \binom{2m-1}{j} \sin k(x+jh)\right| \\
&= 2^m \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k (1-\cos kh)^{m-1} \cos k(x+(m-\frac{h}{2})h) \sin\frac{kh}{2}\right| \\
&= 2^{2m} \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k (\sin\frac{kh}{2})^{2m-1} \cos k(x+(m-\frac{1}{2})h)\right| \\
&\le C\omega(h), h > 0. \qquad (3.2.2)
\end{aligned}
$$

既然$f_1^{(s)}(x)$ 一致收敛的, (3.2.2) 两边可对x 在$(-mh, -mh+\frac{1}{2}h)$ 上进行积分，得到

$$
\begin{aligned}
2^{2m}\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} a_k \sin^{2m}\frac{kh}{2} &= \left|\int_{-mh}^{-mh+\frac{1}{2}h} \Delta^{2m-1}(f_1^{(s)};x;h)dx\right| \\
&\le \int_{-mh}^{-mh+\frac{1}{2}h} \left|\Delta^{2m-1}(f_1^{(s)};x;h)\right| dxdy \\
&\le C\int_{-mh}^{-mh+\frac{1}{2}h} \omega(h)dx \\
&\le Ch\omega(h), \qquad h > 0. \qquad (3.2.3)
\end{aligned}
$$

由(2.4.2) 和(3.2.3), 有

$$
2^{2m}\sum_{k=1}^{n} k^{s-1} a_k \left(\frac{kh}{2}\right)^{2m} \le Ch\omega(h), \qquad h > 0,
$$

其中$n := \left[\frac{1}{h}\right]$. 因此,

$$
\sum_{k=1}^{n} k^{r+s} a_k = O\left(n^r \omega(\frac{1}{n})\right).
$$

定理3.1.3的证明类似，在此略去.

4 二重三角级数和高阶Lipschitz函数类的关系

4.1 引言

给定一个二重非负数列$\{a_{jk}; j,k=1,2,...\}$ 满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} < \infty, \tag{4.1.1}$$

则下列三角级数(分别被叫作二重正弦级数, 正弦-余弦级数, 余弦-正弦级数, 二重余弦级数)

$$f_{11}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \sin jy,$$

$$f_{12}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \cos jy,$$

$$f_{21}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos ix \sin jy,$$

$$f_{22}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos ix \cos jy,$$

是一致收敛的，因此是连续的.

对任意的$f(x,y)\in C(T^2)$, 及$r,s=1,2,...$, $f(x,y)$的(r,s)阶差分定义如下：

$$\triangle^{r,s}(f;x,y;h,k) := \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\gamma=0}^{s}(-1)^{r+s-\mu-\gamma}\binom{r}{\mu}\binom{s}{\gamma} f(x+\mu h, y+\gamma k).$$

定义二重高阶Lipschitz类$\Lambda_{r,s}(\omega)$和$\lambda_{r,s}(\omega)$如下：

$$\Lambda_{r,s}(\omega) := \left\{f(x,y)\in C(T^2) : ||\Delta^{r,s}(f;x,y;h,k)|| = O\left(\omega(h,k)\right), \quad h>0, k>0\right\},$$

$$\lambda_{r,s}(\omega) := \left\{f(x,y)\in C(T^2) : ||\Delta^{r,s}(f;x,y;h,k)|| = o\left(\omega(h,k)\right), \quad h>0, k>0\right\}.$$

明显地, 如果$r=s=1$, $\Lambda_{r,s}(\omega)$ 即为HH^{ω}, 如果$r=s=2$, $\Lambda_{r,s}^{\omega}$ 即是二重Zygmund类ZZ^{ω}.

本章的主要目的是将Lipscitz类和Zygmund 类推广到高阶Lipscitz函数类，并给出二重正弦级数, 正弦-余弦级数, 余弦-正弦级数, 二重余弦级数属于$\Lambda_{r,s}^{\omega}$ 的充分条件和必要条件.

4.2 二重正弦级数与高阶Lipscitz函数类的关系

定理4.2.1 如果

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^r k^s a_{jk} = O\left(m^r n^s \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty} j^r a_{jk} = O\left(m^r \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.2}$$

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} k^s a_{jk} = O\left(n^s \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.3}$$

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{jk} = O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.4}$$

则$f_{11}(x,y) \in \Lambda_{r,s}(\omega)$.

定理4.2.2 如果$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$, 则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r^*} k^{s^*} a_{jk} = O\left(m^{r^*} n^{s^*} \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$

其中$r^* := \begin{cases} r+1, & r\text{为偶数}, \\ r, & r\text{为奇数}, \end{cases}$, $s^* := \begin{cases} s+1, & s\text{为偶数}, \\ s, & s\text{为奇数}. \end{cases}$

如果对$\omega(\delta,\eta)$ 附加一些条件, 我们可获得$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$的充要条件. 事实上, 我们有如下定理:

定理4.2.3 (i).若r 和s 都为奇数, $\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{j}\omega\left(\frac{1}{j},\frac{1}{n}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.5}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{k}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.6}$$

对所有的$m,n = 1,2,...$, 则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii). 若r 为偶数, s 为奇数, $\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5),(4.2.6) 和

$$\sum_{j=1}^{m} j^{r-1}\omega\left(\frac{1}{j},\frac{1}{n}\right) = O\left(m^r \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.7}$$

则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). 若r 为奇数, s 为偶数, 并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5),(4.2.6) 和

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s-1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{j}\right) = O\left(n^{s}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.8}$$

则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2) 成立.

(iv). 若r 和s 都为偶数, $\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5)-(4.2.8), 则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

现在我们给出定理4.2.3的一些有用推论.

推论4.2.1 如果存在μ_1, ν_1 $(\mu_1, \nu_1 > 0)$ 使得$\left\{m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 则

(i). 若r 和s 都为奇数, $f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii). r 为偶数, s 为奇数, 且存在 μ_2 $(0 < \mu_2 < r)$ 使得$\left\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于m 几乎递增, 则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). 若r 为奇数, s 为偶数, 且存在ν_2 $(0 < \nu_2 < s)$ 使得$\left\{n^{\nu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于n 几乎递增, 则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2) 成立.

(iv). 若r 和s 都为偶数, 且存在μ_3, ν_3 $(0 < \mu_3 < r, 0 < \nu_3 < s)$ 使得$\left\{m^{\mu_3}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_3}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

推论4.2.2 (i). 若r 和s 都为奇数, 并且$\omega(\delta,\eta) = \delta^{\alpha}\eta^{\beta}$ $(0 < \alpha \le r, 0 < \beta \le s)$, 则$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r}k^{s}a_{jk} = O\left(m^{r-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(ii). 若r 为偶数, s 为奇数, 并且$\omega(\delta,\eta)=\delta^{\alpha}\eta^{\beta}$ $(0<\alpha<r, 0<\beta\leq s)$, 则$f_{11}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^{s}a_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(iii). 若r 为奇数, s 为偶数, 并且$\omega(\delta,\eta)=\delta^{\alpha}\eta^{\beta}$ $(0<\alpha\leq r, 0<\beta<s)$, 则$f_{11}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}j^{r}a_{jk}=O\left(m^{r-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

(iv). 若r 和s 都为偶数, 并且$\omega(\delta,\eta)=\delta^{\alpha}\eta^{\beta}(0<\alpha<r, 0<\beta<s)$, 则$f_{11}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}a_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

注2. 当'O' 被'o'取代, 并且$\Lambda_{r,s}(\omega)$ 被$\lambda_{r,s}(\omega)$取代, 相应的结果仍然成立.
下面我们给出一些引理.

引理4.2.1 如果$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6), 则对任意的$\delta\geq r,\eta\geq s$,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}i^{\delta}j^{\eta}a_{jk}=O\left(m^{\delta}n^{\eta}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.9}$$

可推出

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty}j^{\delta}a_{jk}=O\left(m^{\delta}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.10}$$

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^{\eta}a_{jk}=O\left(n^{\eta}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.2.11}$$

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{jk}=O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4.2.12}$$

引理4.2.1在[11]中已证得.

引理4.2.2 如果$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.7)和(4.2.8), 则对任意的$\delta\geq r,\eta\geq s$, (4.2.12) 可推出(4.2.9)-(4.2.11).

证明:

令M 和N 为$1 \le m < M, 1 \le n < N$的整数, 由阿贝尔变换可得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} i^{\delta} \sum_{j=1}^{n} j^{\eta} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} i^{\delta} \sum_{j_1=1}^{n} (j_1^{\eta} - (j_1 - 1)^{\eta}) \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij} - n^{\eta} \sum_{j=n+1}^{N} a_{ij} \\
&\le \sum_{j_1=1}^{n} \eta j_1^{\eta-1} \sum_{j=j_1}^{N} \sum_{i=1}^{m} i^{\delta} a_{ij} \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \eta j_1^{\eta-1} \sum_{j=j_1}^{N} \left(\sum_{i_1=1}^{m} (i_1^{\delta} - (i_1 - 1)^{\delta}) \sum_{i=i_1}^{M} a_{ij} - m^{\delta} \sum_{i=m+1}^{M} a_{ij} \right) \\
&\le \sum_{j_1=1}^{n} \eta j_1^{\eta-1} \sum_{i_1=1}^{m} \delta i_1^{\delta-1} \sum_{j=j_1}^{N} \sum_{i=i_1}^{M} a_{ij}.
\end{aligned}$$

令M 和N 趋向于∞, 由(4.2.12), 我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i^{\delta} j^{\eta} a_{ij} &= O\left(\sum_{i_1=1}^{m} \sum_{j_1=1}^{n} i_1^{\delta-1} j_1^{\eta-1} \omega(\frac{1}{i_1}, \frac{1}{j_1}) \right) \\
&= O\left(m^{\delta-r} n^{\eta-s} \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{j_1=1}^{n} i_1^{r-1} j_1^{s-1} \omega(\frac{1}{i_1}, \frac{1}{j_1}) \right) \\
&= O\left(m^{\delta} n^{\eta-s} \sum_{j_1=1}^{n} j_1^{s} \omega(\frac{1}{i_1}, \frac{1}{j_1}) \right) \\
&= O\left(m^{\delta} n^{\eta} \omega(\frac{1}{i_1}, \frac{1}{j_1}) \right),
\end{aligned}$$

这就证得(4.2.9).

由阿贝尔变换, 我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n}^{\infty} i^{\delta} a_{ij} &\le \sum_{j=n}^{\infty} \left(\sum_{i_1=1}^{m} (i_1^{\delta} - (i_1 - 1)^{\delta}) \sum_{i=i_1}^{M} a_{ij} - m^{\delta} \sum_{i=m+1}^{M} a_{ij} \right) \\
&\le \sum_{i_1=1}^{m} \delta i_1^{\delta-1} \sum_{i=i_1}^{M} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij}.
\end{aligned}$$

令M 趋向于∞, 由(4.2.7), 得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n}^{\infty} i^{\delta} a_{ij} &= O\left(m^{\delta-r} \sum_{i_1=1}^{m} i_1^{r-1} \omega(\frac{1}{i_1}, \frac{1}{n}) \right) \\
&= O\left(m^{\delta} \omega(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) \right).
\end{aligned}$$

这就证得(4.2.10).

与(4.2.10)的证明类似，可得到(4.2.11).

类似于引理4.2.2，我们有如下引理：

引理4.2.3 如果$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5) 和(4.2.8)，则对任意的$\delta\geq r,\eta\geq s$，(4.2.10) 可推出(4.2.9)，(4.2.11) 和(4.2.12).

引理4.2.4 如果$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.6) 和(4.2.7)，则对任意的$\delta\geq r,\eta\geq s$，(4.2.11) 可推出(4.2.9)，(4.2.10) 和(4.2.12).

注3： 如果把“O”换成“o”，则引理4.2.1-引理4.2.4的结论仍然是成立的.

下面我们给出结论的证明.

定理4.2.1的证明 令$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$ 对给定的$\delta>0,\eta>0$. 这里[.]表示取整数部分. 直接计算可得

$$\begin{aligned}|\Delta^{r,s}(f_{11};x,y;\delta,\eta)|&=\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\sum_{\mu=0}^{r}(-1)^{r-\mu}\binom{r}{\mu}\sin j(x+\mu\delta)\sum_{\gamma=0}^{s}(-1)^{s-\gamma}\binom{s}{\gamma}\sin k(y+\gamma\eta\right.\\&\leq\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}e^{ijx}\left(1-e^{ij\delta}\right)^{r}e^{iky}\left(1-e^{ik\eta}\right)^{s}\right|\\&\leq 2^{r+s}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\left|\sin\frac{j\delta}{2}\right|^{r}\left|\sin\frac{k\eta}{2}\right|^{s}\\&\leq 2^{r+s}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty}+\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}+\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\right\}a_{jk}\left|\sin\frac{j\delta}{2}\right|^{r}\left|\sin\right.\\&=:S_1+S_2+S_3+S_4.\end{aligned}$$

由(4.2.1) 可得

$$S_1\leq\delta^{r}\eta^{s}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r}k^{s}a_{jk}=O\left(\omega(\delta,\eta)\right).$$

由(4.2.2) 和(4.2.3)，可得

$$S_2\leq 2^{s}\delta^{r}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty}j^{r}a_{jk}=O\left(\omega(\delta,\eta)\right),$$

$$S_3 \le 2^r \eta^s \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k^s a_{jk} = O\left(\omega(\delta, \eta)\right).$$

最后，由(4.2.4) 可得

$$S_4 \le 2^{r+s} \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{jk} = O\left(\omega(\delta, \eta)\right).$$

综合以上，证得$f_{11}(x,y) \in \Lambda_{r,s}(\omega)$.

定理4.2.2的证明： 分四种情况进行证明.

情形1. r 和s 都为奇数，设$r = 2m_0 - 1$， $s = 2n_0 - 1$ ， $m_0, n_0 = 1, 2, \ldots$ 由于$f_{11} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$，由(2.3.4)，存在一常数$C$ 使得

$$\begin{aligned}
|\Delta^{r,s}(f_{11}; x, y; \delta, \eta)| =& 2^{m_0+n_0} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \left(1 - \cos j\delta\right)^{m_0-1} \left(1 - \cos k\eta\right)^{n_0-1} \sin\left(\frac{j\delta}{2}\right) \right| \times \\
& \left| \cos j \left(x + \left(m_0 - \frac{1}{2}\right)\delta\right) \sin\left(\frac{k\eta}{2}\right) \cos k \left(y + \left(n_0 - \frac{1}{2}\right)\eta\right) \right| \\
\le & C\omega(\delta, \eta), \qquad \delta > 0, \eta > 0.
\end{aligned}$$

由f_{11} 的一致收敛性，可对上式两边关于x在$(-m_0\delta, -\left(m_0 - \frac{1}{2}\right)\delta)$ 上进行积分，关于y 在$(-n_0\eta, -\left(n_0 - \frac{1}{2}\right)\eta)$上进行积分，得到

$$\begin{aligned}
2^{2(m_0+n_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{jk} \sin^{2m_0} \frac{j\delta}{2} \sin^{2n_0} \frac{k\eta}{2} =& \left| \int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta} \int_{-n_0\eta}^{-\left(n_0-\frac{1}{2}\right)\eta} \Delta^{r,s}(f_{11}; x, y; \delta, \eta) dxdy \right| \\
&\le \int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta} \int_{-n_0\eta}^{-\left(n_0-\frac{1}{2}\right)\eta} \left|\Delta^{r,s}(f_{11}; x, y; \delta, \eta)\right| dxdy \\
&\le C \int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta} \int_{-n_0\eta}^{-\left(n_0-\frac{1}{2}\right)\delta} \omega(\delta, \eta) dxdy \\
&\le C\delta\eta\omega(\delta, \eta), \qquad \delta > 0, \eta > 0. \quad (4.2.13)
\end{aligned}$$

由著名不等式(2.4.2)和(4.2.13)，可得

$$2^{2(m_0+n_0)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{jk}}{jk} \left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0} \left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0} \le C\delta\eta\omega(\delta, \eta), \qquad \delta > 0, \eta > 0,$$

其中$m := \left[\frac{1}{\delta}\right], n := \left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此，

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} j^r k^s a_{jk} = O\left(m^r n^s \omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right).$$

情形2. r 为奇数, s 为偶数, 设$r=2m_0-1$, $s=2n_0$, $m_0,n_0=1,2,\ldots.$ 由于$f_{11}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$, 由(2.3.2), (2.3.4), 存在一常数C 使得

$$\begin{aligned}|\Delta^{r,s}(f_{11};x,y;\delta,\eta)|=&2^{m_0+n_0}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\left(1-\cos j\delta\right)^{m_0-1}\left(1-\cos k\eta\right)^{n_0}\right.\\&\left.\sin\left(\frac{j\delta}{2}\right)\cos j\left(x+\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta\right)\sin k(y+n_0\eta)\right|\\\le&C\omega(\delta,\eta),\qquad\delta>0,\eta>0.\end{aligned}$$

可对上式两边关于x 在$(-m_0\delta,-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta)$ 上进行积分, 关于y 在$(-n_0\eta,-n_0\eta+\eta)$ 上进行积分, 可得

$$\begin{aligned}2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{jk}}{jk}\sin^{2m_0}\frac{j\delta}{2}\sin^{2n_0+2}\frac{k\eta}{2}=&\left|\int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta}\int_{-n_0\eta}^{-n_0\eta+\eta}\Delta^{r,s}(f_{11};x,y;\delta,\eta)dxdy\right|\\\le&\int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta}\int_{-n_0\eta}^{-n_0\eta+\eta}\left|\Delta^{r,s}(f_{11};x,y;\delta,\eta)\right|dxdy\\\le&\int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta}\int_{-n_0\eta}^{-n_0\eta+\eta}\omega(\delta,\eta)dxdy\\\le&C\delta\eta\omega(\delta,\eta),\qquad\delta>0,\eta>0.\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

由(2.4.2) 和(4.2.14), 可得

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{jk}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0+2}\le C\delta\eta\omega(\delta,\eta),\qquad\delta>0,\eta>0,$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^rk^{s+1}a_{jk}=O\left(m^rn^{s+1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right).$$

情形3. r 为偶数, s 为奇数. 证明过程同第二种情形类似.

情形4. r 和s 都为偶数, 设$r=2m_0$, $s=2n_0$, $m_0,n_0=1,2,\ldots.$ 由于$f_{11}\in$

$\Lambda_{r,s}(\omega)$, 由(2.3.2), 存在一常数C 使得

$$\begin{aligned}|\Delta^{r,s}(f_{11};x,y;\delta,\eta)| =& 2^{m_0+n_0}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\left(1-\cos j\delta\right)^{m_0}\left(1-\cos k\eta\right)^{n_0}\sin j(x+m_0\delta)\right| \\ &\times|\sin k(y+n_0\eta)| \\ =& 2^{2(m_0+n_0)}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\sin^{2m_0}\frac{j\delta}{2}\sin^{2n_0}\frac{k\eta}{2}\sin j(x+m_0\delta)\right| \\ &\times|\sin k(y+n_0\eta)| \\ \le& C\omega(\delta,\eta),\qquad \delta>0,\eta>0.\end{aligned}$$

可对上式两边关于x 在$(-m_0\delta.-m_0\delta+\delta)$ 上进行积分, 关于对y 在$(-n_0\eta,-n_0\eta+\eta)$, 上进行积分, 得

$$\begin{aligned}2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{jk}}{jk}\sin^{2m_0+2}\frac{j\delta}{2}\sin^{2n_0+2}\frac{k\eta}{2} =& \left|\int_{-m_0\delta}^{-m_0\delta+\delta}\int_{-n_0\eta}^{-n_0\eta+\eta}\Delta^{r,s}(f_{11};x,y;\delta,\eta)dxdy\right| \\ \le& \int_{-m_0\delta}^{-m_0\delta+\delta}\int_{-n_0\eta}^{-n_0\eta+\eta}|\Delta^{r,s}(f_{11};x,y;\delta,\eta)|\,dxdy \\ \le& C\int_{-m_0\delta}^{-m_0\delta+\delta}\int_{-n_0\eta}^{-n_0\eta+\eta}\omega(\delta,\eta)dxdy \\ \le& C\delta\eta\omega(\delta,\eta),\qquad \delta>0,\eta>0.\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

由(2.4.2) 和(4.2.15), 可得

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{jk}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0+2}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0+2}\le C\delta\eta\omega(\delta,\eta),\qquad \delta>0,\eta>0,$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r+1}k^{s+1}a_{jk}=O\left(m^{r+1}n^{s+1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right).$$

定理4.2.3的证明: (i). 必要性由定理4.2.2得出, 充分性由定理4.2.1 和引理4.2.1 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(ii). 必要性由定理4.2.2 和引理4.2.1 (取$\delta=r+1,\eta=s$)得出, 充分性由定理4.2.1 和引理4.2.4 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(iii). 必要性由定理4.2.2和引理4.2.1 (取$\delta=r,\eta=s+1$)得出, 充分性由定理4.2.1 和引理4.2.3 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(iv). 必要性由定理4.2.2 和引理4.2.1 (取$\delta=r+1,\eta=s+1$)得出, 充分性由定理4.2.1 和引理4.2.2 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

推论4.2.1的证明： (i). 如果存在μ_1,ν_1 ($\mu_1,\nu_1>0$) 使得$\left\{m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$和$\left\{n^{\nu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{\infty}j^{-1}\omega\left(\frac{1}{j},\frac{1}{n}\right)=&\sum_{j=m}^{\infty}j^{-1-\mu_1}\left(j^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{j},\frac{1}{n}\right)\right)\\=&O\left(m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{m}j^{-1-\mu_1}\right)\\=&O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

则推出(4.2.5). 类似可得(4.2.6).

因此, (i)由定理4.2.3的(i)得出.

(ii). 如果存在μ_2 ($0<\mu_2<r$) 使得$\left\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于m几乎递增, 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}j^{r-1}\omega\left(\frac{1}{j},\frac{1}{n}\right)=&\sum_{j=1}^{m}j^{r-1-\mu_2}\left(j^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{j},\frac{1}{n}\right)\right)\\=&O\left(m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{m}j^{r-1-\mu_2}\right)\\=&O\left(m^{r}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

则推出(4.2.7). 类似可得(4.2.8).

因此, (ii) 由定理4.2.3的(ii)得出.

类似的, (iii) 和(iv)分别由定理4.2.3的(iii) 和(iv) 得出.

推论4.2.2的证明： 设

$$\omega(u,v)=u^{\alpha}v^{\beta},\ \alpha,\beta>0.$$

则$\omega(u,v)$ 在推论4.2.2参数α,β 的假设下满足定理4.2.3的条件，因此，推论4.2.2可由定理4.2.3得出.

4.3 二重余弦级数与高阶Lipschitz函数类的关系

定理4.3.1 如果我们有(4.2.1)-(4.2.4)，则有$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$.

定理4.3.2 如果$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$，则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r^\circ}k^{s^\circ}a_{jk}=O\left(m^{r^\circ}n^{s^\circ}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$

其中$r^\circ:=\begin{cases}r, & r\text{为偶数},\\ r+1, & r\text{为奇数},\end{cases}$, $s^\circ:=\begin{cases}s, & s\text{为偶数},\\ s+1, & s\text{为奇数}.\end{cases}$

如果对$\omega(h,k)$附加一些条件，我们便能得到$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$的充要条件. 事实上，有如下定理.

定理4.3.3 (i). r 和s 都为偶数，并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6)，则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii). r 为奇数，s 为偶数，并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6), (4.2.7)，则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). r 为偶数，s 为奇数，并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6), (4.2.8)，则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2) 成立.

(iv). r 和s 都为奇数，并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5)-(4.2.8)，则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

现在我们给出定理4.3.3的一些有用推论.

推论4.3.1 如果存在μ_1,ν_1 $(\mu_1,\nu_1>0)$ 使得$\left\{m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 则

(i). 若r 和s 都为偶数, $f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii). 若r 为奇数, s 为偶数, 且存在$\mu_2\,(0<\mu_2<r)$ 使得$\left\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于m几乎递增, 则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). 若r 为偶数, s 为奇数, 且存在ν_2 $(0<\nu_2<s)$ 使得$\left\{n^{\nu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于n几乎递增, 则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2) 成立.

(iv). 若r 和s 都为奇数, 且存在μ_3,ν_3 $(0<\mu_3<r,0<\nu_3<s)$ 使得$\left\{m^{\mu_3}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_3}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

推论4.3.2 (i). 若r 和s 都为偶数, $\omega(h,k)=h^{\alpha}k^{\beta}(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r}k^{s}a_{jk}=O\left(m^{r-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(ii). 若r 为奇数, s 为偶数, $\omega(h,k)=h^{\alpha}k^{\beta}(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^{s}a_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(iii). 若r 为偶数, s 为奇数, $\omega(h,k)=h^{\alpha}k^{\beta}(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}j^{r}a_{jk}=O\left(m^{r-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

(iv).若r 和s 都为奇数, $\omega(h,k)=h^{\alpha}k^{\beta}(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{22}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}a_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

下面我们给出以上定理的证明.

定理4.3.1的证明 证明过程同定理4.2.1.

定理4.3.2的证明 分四种情况进行证明.

因为$f_{22} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$, 存在一常数$C$ 使得

$$\begin{aligned}|\triangle^{r,s}(f_{22};x,y;\delta,\eta)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \sum_{\mu=0}^{r}(-1)^{r-\mu}\binom{r}{\mu}\cos j(x+\mu\delta)\sum_{\nu=0}^{s}(-1)^{s-\nu}\binom{s}{\nu}\cos k(y+\nu\eta)\right| \\ &\leq C\omega(\delta,\eta), \delta>0, \eta>0.\end{aligned}$$

情形1. r 和s 都为偶数, 设$r=2m_0, s=2n_0$, $m_0, n_0=1,2...$由(2.3.1),

$$\begin{aligned}|\triangle^{r,s}(f_{22};x,y;\delta,\eta)| &= \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0}\cos j(x+m_0\delta)(1-\cos k\eta)^{n_0}\right| \\ &\quad \times |\cos k(y+n_0\eta)| \qquad (4.3.1)\end{aligned}$$

由(4.3.1), 可得

$$\begin{aligned}|\triangle^{r,s}(f_{22};-m_0\delta,-n_0\eta;\delta,\eta)| &= \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0}(1-\cos k\eta)^{n_0}\right| \\ &= \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\sin\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\sin\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\right| \\ &\leq C\omega(\delta,\eta), \delta>0, \eta>0. \qquad (4.3.2)\end{aligned}$$

由(2.4.2) 和(4.3.2), 我们得到

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0} \leq C\omega(\delta,\eta), \qquad \delta>0, \eta>0,$$

其中$m := \left[\frac{1}{\delta}\right], n := \left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{2m_0}k^{2n_0}a_{jk} = \frac{O(\omega(\delta,\eta))}{\delta^{2m_0}\eta^{2n_0}},$$

即

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^r k^s a_{jk} = O\left(m^r n^s \omega(\frac{1}{m},\frac{1}{n})\right).$$

情形2. r 为偶数, s 为奇数, 设$r=2m_0, s=2n_0-1$, 由(2.3.1) 和(2.3.3),

$$\begin{aligned}|\triangle^{r,s}(f_{22};x,y;\delta,\eta)| &= \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0}\cos j(x+m_0\delta)(1-\cos k\eta)^{n_0-1}\right. \\ &\quad \left.\sin k(y+n_0\eta-\frac{\eta}{2})\sin\frac{k\eta}{2}\right| \qquad (4.3.3)\end{aligned}$$

由(4.3.3), 我们得到

$$|\triangle^{r,s}(f_{22};-m_0\delta,-n_0\eta;\delta.\eta)| = \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0}(1-\cos k\eta)^{n_0}\right|$$
$$= \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\sin\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\sin\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\right|$$
$$\leq C\omega(\delta,\eta),\delta>0,\eta>0. \tag{4.3.4}$$

由(2.4.2) 和(4.3.4), 可得

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\leq C\omega(\delta,\eta),\qquad \delta>0,\eta>0,$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{2m_0}k^{2n_0}a_{jk}=\frac{O(\omega(\delta,\eta))}{\delta^{2m_0}\eta^{2n_0}},$$

即,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r}k^{s+1}a_{jk}=O\left(m^{r}n^{s+1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right).$$

情形3 .证明过程同情形2类似.

情形4. r 和s 都为奇数, 设$r=2m_0-1,s=2n_0-1,\ m_0,n_0=1,2...$由(2.3.3),

$$|\triangle^{r,s}(f_{22};x,y;\delta,\eta)| = \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0-1}\sin j(x+m_0\delta-\frac{\delta}{2})\sin\frac{j\delta}{2}\right|$$
$$\times\left|(1-\cos k\eta)^{n_0-1}\sin k(y+n_0\eta-\frac{\eta}{2})\sin\frac{k\eta}{2}\right| \tag{4.3.5}$$

由(4.3.5), 可得

$$|\triangle^{r,s}(f_{22};-m_0\delta,-n_0\eta;\delta,\eta)| = \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0-1}\sin\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2}\right|$$
$$\times\left|(1-\cos k\eta)^{n_0-1}\sin\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2}\right|$$
$$= \left|2^{(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\sin\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\sin\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\right|$$
$$\leq C\omega(\delta,\eta),\delta>0,\eta>0. \tag{4.3.6}$$

由(2.4.2) 和(4.3.6), 我们得到

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\le C\omega(\delta,\eta),\qquad \delta>0,\eta>0,$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{2m_0}k^{2n_0}a_{jk}=\frac{O(\omega(\delta,\eta))}{\delta^{2m_0}\eta^{2n_0}},$$

即

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r+1}k^{s+1}a_{jk}=O\left(m^{r+1}n^{s+1}\omega(\frac{1}{m},\frac{1}{n})\right).$$

定理4.3.3的证明:

(i). 必要性由定理4.3.2得出, 充分性由定理4.3.1和引理4.2.1 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(ii). 必要性由定理4.3.2和引理4.2.1(取$\delta=r+1,\eta=s$) 得出, 充分性由定理4.3.1和引理4.2.4 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(iii). 必要性由定理4.3.2 和引理4.2.1(取$\delta=r,\eta=s+1$)得出, 充分性由定理4.3.1和引理4.2.3 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(iv). 必要性由定理4.3.2 和引理4.2.1 (取$\delta=r+1,\eta=s+1$)得出, 充分性由定理4.3.1和引理4.2.2 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

推论4.3.1的证明: 证明过程同推论4.2.1.

推论4.3.2的证明: 证明过程同推论4.2.2.

4.4 二重正弦-余弦级数, 二重余弦-正弦级数与高阶Lipschitz函数类的关系

定理4.4.1 如果我们有(4.2.1)-(4.2.4), 则有$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$.

定理4.4.2 如果$f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$, 则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r^*} k^{s^\circ} a_{jk} = O\left(m^{r^*} n^{s^\circ} \omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right),$$

其中$r^* := \begin{cases} r+1, & r\text{为偶数}, \\ r, & r\text{ 为奇数}, \end{cases}$, $s^\circ := \begin{cases} s, & s\text{ 为偶数}, \\ s+1, & s\text{ 为奇数}. \end{cases}$

如果对$\omega(h,k)$附加一些条件，我们便能得到$f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$的充要条件. 事实上，有如下定理.

定理4.4.3 (i). 如果r 为奇数, s 为偶数, $\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6) , 则$f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii).如果r 和s 都为偶数, $\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$满足(4.2.5), (4.2.6) ,(4.2.7), 则$f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). 如果r 和s 均为奇数, $\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6) ,(4.2.8), 则$f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2) 成立.

(iv). 如果r 为偶数, s为奇数, $\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5)-(4.2.8), 则$f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

现在我们给出定理4.4.3的一些有用推论.

推论4.4.1 如果存在μ_1, ν_1 $(\mu_1, \nu_1 > 0)$ 使得$\left\{m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_1}\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 那么

(i). 若r 为奇数, s 为偶数, $f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii). 若r 和s 都为偶数, 且存在μ_2 $(0 < \mu_2 < r)$ 使得$\left\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于m 几乎递增, 则$f_{12} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). 若r 和s 均为奇数, 且存在ν_2 $(0<\nu_2<s)$ 使得$\left\{n^{\nu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于n 几乎递增, 则$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2) 成立.

(iv). 若r 为偶数, s为奇数, 且存在μ_3,ν_3 $(0<\mu_3<r,0<\nu_3<s)$ 使得$\left\{m^{\mu_3}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_3}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递增, 则$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

推论4.4.2 (i). r 为奇数, s 为偶数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^rk^sa_{jk}=O\left(m^{r-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(ii). r 和s 都为偶数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^sa_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(iii). r 和s 均为奇数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}j^ra_{jk}=O\left(m^{r-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

(iv). r 为偶数, s为奇数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r,0<\beta<s)$, 则$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}a_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

对

$$f_{21}(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\cos jx\sin ky,$$

我们有如下结果:

定理4.4.4 如果我们有(4.2.1) -(4.2.4), 则有$f_{21}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$.

定理4.4.5 若$f_{21}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 则

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}i^{r^\circ}j^{s^*}a_{ij}=O\left(m^{r^\circ}n^{s^*}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right),$$

其中$r^\circ := \begin{cases} r, & \text{r 为偶数}, \\ r+1, & \text{r 为奇数}, \end{cases}$, $s^* := \begin{cases} s+1, & \text{s 为偶数}, \\ s, & \text{s 为奇数}. \end{cases}$

如果对$\omega(h,k)$附加一些条件，我们便能得到$f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$的充要条件. 事实上，有如下定理.

定理4.4.6 (i). r 为偶数, s 为奇数, 并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6), 则$f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii). r 和s 都为奇数, 并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6), (4.2.7), 则$f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). r 和s 都为偶数, 并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5), (4.2.6), (4.2.8), 则$f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2)成立.

(iv). r 为奇数，s为偶数, 并且$\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ 满足(4.2.5)-(4.2.8), 则$f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

下面我们给出定理4.4.6的一些有用的推论.

推论4.4.3 如果存在μ_1, ν_1 $(\mu_1, \nu_1 > 0)$ 使得$\left\{m^{\mu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_1}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 则

(i). 若r 为偶数, s 为奇数, $f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.1) 成立.

(ii). 若r 和s 都为奇数, 且存在μ_2 $(0 < \mu_2 < r)$ 使得$\left\{m^{\mu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于m几乎递增, 则$f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.3) 成立.

(iii). 若r 和s 都为偶数, 且存在ν_2 $(0 < \nu_2 < s)$ 使得$\left\{n^{\nu_2}\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}$ 关于n几乎递增, 则$f_{21} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.2) 成立.

(iv). 若r 为奇数，s为偶数, 且存在μ_3, ν_3 $(0<\mu_3<r, 0<\nu_3<s)$ 使得$\left\{m^{\mu_3}\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ 和$\left\{n^{\nu_3}\omega\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ 分别关于m 和n几乎递减, 则$f_{21}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当(4.2.4) 成立.

推论4.4.4 (i). 若r 为偶数, s 为奇数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r, 0<\beta<s)$, 则$f_{21}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^r k^s a_{jk}=O\left(m^{r-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(ii). 若r 和s 都为奇数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r, 0<\beta<s)$, 则$f_{21}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k^s a_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{s-\beta}\right).$$

(iii). 若r 和s 都为偶数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r, 0<\beta<s)$, 则$f_{21}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}j^r a_{jk}=O\left(m^{r-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

(iv). 若r 为奇数，s为偶数, 并且$\omega(h,k)=h^\alpha k^\beta(0<\alpha<r, 0<\beta<s)$, 则$f_{21}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$ 当且仅当

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}a_{jk}=O\left(m^{-\alpha}n^{-\beta}\right).$$

下面我们给出以上结果的证明.

定理4.4.1的证明： 证明过程同定理4.2.1.

定理4.4.2的证明： 分四种情况进行证明.

情形1. r 为奇数, s 为偶数, 设$r=2m_0-1$， $s=2n_0$, $m_0, n_0=1,2,\ldots$. 由于$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$, 利用(2.3.4) 和(2.3.1), 存在一常数C 使得

$$\begin{aligned}|\Delta^{r,s}(f_{12};x,-n_0\eta;\delta,\eta)| &= \left|2^{m_0+n_0}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0-1}\cos\left(j(x+m_0\delta-\frac{\delta}{2})\right)\right| \\ &\quad\times\left|\sin\frac{j\delta}{2}(1-\cos k\eta)^{n_0}\right| \\ &\le C\omega(\delta,\eta), \delta>0, \eta>0.\end{aligned}$$

由f_{12} 的一致收敛性,可对上式两边关于x 在$(-m_0\delta, -m_0\delta+\frac{1}{2}\delta)$上进行积分, 可得

$$
\begin{aligned}
2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{jk}}{j}\sin^{2m_0}\frac{j\delta}{2}\sin^{2n_0}\frac{k\eta}{2} &= \left|\int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta}\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)dx\right| \\
&\le \int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta}\left|\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)\right|dx \\
&\le C\int_{-m_0\delta}^{-\left(m_0-\frac{1}{2}\right)\delta}\omega(\delta,\eta)dx \\
&\le C\delta\omega(\delta,\eta), \qquad \delta>0,\eta>0. \quad (4.4.1)
\end{aligned}
$$

由(2.4.2) 和(4.4.1), 我们得到

$$
2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{j}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0} \le C\delta\omega(\delta,\eta), \qquad \delta>0,\eta>0,
$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right], n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$
\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}j^{2m_0-1}k^{2n_0}a_{jk}=\frac{O(\omega(\delta,\eta))}{\delta^{2m_0-1}\eta^{2n_0}},
$$

$$
\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r}k^{s}a_{jk}=O\left(m^{r}n^{s}\omega(\frac{1}{m},\frac{1}{n})\right).
$$

情形2. r 和s 都为偶数, 设$r=2m_0$, $s=2n_0$, $m_0,n_0=1,2,\ldots$. 由于$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$, 利用(2.3.1) 和(2.3.2), 存在一常数C 使得

$$
\begin{aligned}
|\Delta^{r,s}(f_{12};x,-n_0\eta;\delta,\eta)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}2^{m_0+n_0}(1-\cos j\delta)^{m_0}\sin j(x+\mu\delta)(1-\cos k\eta)^{n_0}\right| \\
&\le C\omega(\delta,\eta), \delta>0,\eta>0.
\end{aligned}
$$

由f_{12} 的一致收敛性, 可对上式两边关于x 在$(-m_0\delta,-m_0\delta+\delta)$ 上进行积分, 可得

$$
\begin{aligned}
2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{jk}}{j}\sin^{2m_0+2}\frac{j\delta}{2}\sin^{2n_0}\frac{k\eta}{2} &= \left|\int_{-m_0\delta}^{-(m_0-1)\delta}\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)dx\right| \\
&\le \int_{-m_0\delta}^{-(m_0-1)\delta}\left|\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)\right|dx \\
&\le C\int_{-m_0\delta}^{-(m_0-1)\delta}\omega(\delta,\eta)dx \\
&\le C\delta\omega(\delta,\eta). \qquad \delta>0,\eta>0. \quad (4.4.2)
\end{aligned}
$$

由(2.4.2) 和(4.4.2), 我们得到

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{j}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0+2}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\le C\delta\omega(\delta,\eta),\qquad \delta>0,\eta>0,$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{2m_0+1}k^{2n_0}a_{jk}=\frac{O(\omega(\delta,\eta))}{\delta^{2m_0+1}\eta^{2n_0}},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r+1}k^{s}a_{jk}=O\left(m^{r+1}n^{s}\omega(\frac{1}{m},\frac{1}{n})\right).$$

情形3. r 和s 都为奇数, 设$r=2m_0-1$, $s=2n_0-1$, $m_0,n_0=1,2,\ldots$. 由于$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$, 利用(2.3.3) 和(2.3.4), 存在一常数C 使得

$$\begin{aligned}|\Delta^{r,s}(f;x,-n_0\eta;\delta,\eta)|&=\left|2^{m_0+n_0}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}(1-\cos j\delta)^{m_0-1}\cos\left(j(x+m_0\delta-\frac{h}{2})\right)\right|\\&\quad\left|\sin\frac{j\delta}{2}(1-\cos k\eta)^{n_0-1}(\sin\frac{k\eta}{2})^2\right|\\&\le C\omega(\delta,\eta),\delta>0,\eta>0.\end{aligned}$$

由f_{12} 的一致收敛性, 可对上式两边关于x 在$(-m_0\delta,-m_0\delta+\frac{1}{2}\delta)$ 上进行积分, 可得

$$\begin{aligned}2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{jk}}{j}\sin^{2m_0}\frac{j\delta}{2}\sin^{2n_0}\frac{k\eta}{2}&=\left|\int_{-m_0\delta}^{-(m_0-\frac{1}{2})\delta}\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)dx\right|\\&\le\int_{-m_0\delta}^{-(m_0-\frac{1}{2})\delta}|\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)|\,dx\\&\le C\int_{-m_0\delta}^{-(m_0-\frac{1}{2})\delta}\omega(\delta,\eta)dx\\&\le C\delta\omega(\delta,\eta),\qquad\delta>0,\eta>0.\quad(4.4.3)\end{aligned}$$

由(2.4.2) 和(4.4.3), 我们得到

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{j}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\le C\delta\omega(\delta,\eta),\qquad\delta>0,\eta>0,$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{2m_0-1}k^{2n_0}a_{jk}=\frac{O(\omega(\delta,\eta))}{\delta^{2m_0-1}\eta^{2n_0}},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r}k^{s+1}a_{jk}=O\left(m^{r}n^{s+1}\omega(\frac{1}{m},\frac{1}{n})\right).$$

情形4. r 为偶数, s 为奇数, 设$r=2m_0$, $s=2n_0-1$, $m_0,n_0=1,2,\ldots$ 由于$f_{12}\in\Lambda_{r,s}(\omega)$, 利用(2.3.2) 和(2.3.3), 存在一常数C 使得

$$\begin{aligned}|\Delta^{r,s}(f_{12};x,-n_0\eta;\delta,\eta)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}2^{m_0+n_0}(1-\cos j\delta)^{m_0}\sin j(x+m_0\delta)(1-\cos k\eta)^{n_0-1}\right| \\ &\quad\times\left|\left(\sin\frac{k\eta}{2}\right)^2\right| \\ &\le C\omega(\delta,\eta).\end{aligned}$$

由f_{12} 的一致收敛性, 可对上式两边关于x 在$(-m_0\delta,-m_0\delta+\delta)$上进行积分, 可得

$$\begin{aligned}2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{jk}}{j}\sin^{2m_0+2}\frac{j\delta}{2}\sin^{2n_0}\frac{k\eta}{2} &= \left|\int_{-m_0\delta}^{-(m_0-1)\delta}\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)dx\right| \\ &\le \int_{-m_0\delta}^{-(m_0-1)\delta}|\Delta^{r,s}(f_{12};x,y;\delta,\eta)|\,dx \\ &\le C\int_{-m_0\delta}^{-(m_0-1)\delta}\omega(\delta,\eta)dx \\ &\le C\delta\omega(\delta,\eta). \qquad \delta>0,\eta>0. \quad (4.4.4)\end{aligned}$$

由(2.4.2) 和(4.4.4), 我们得到

$$2^{2(m_0+n_0)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{j}\left(\frac{j\delta}{2}\right)^{2m_0+2}\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{2n_0}\le C\delta\omega(\delta,\eta), \qquad \delta>0,\eta>0,$$

其中$m:=\left[\frac{1}{\delta}\right],n:=\left[\frac{1}{\eta}\right]$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}j^{r+1}k^{s+1}a_{jk}=O\left(m^{r+1}n^{s+1}\omega(\frac{1}{m},\frac{1}{n})\right).$$

定理4.4.3的证明: (i). 必要性由定理4.4.2得出, 充分性由定理4.4.1 和引理4.2.1 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(ii). 必要性由定理4.4.2 和引理4.3.2(取$\delta=r+1,\eta=s$)得出, 充分性由定理4.4.1 和引理4.2.4 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(iii). 必要性由定理4.4.2和引理4.3.2(取$\delta=r,\eta=s+1$)得出, 充分性由定理4.4.1 和引理4.2.3 (取$\delta=r,\eta=s$)得出.

(iv). 必要性由定理4.4.2 和引理4.3.2 (取$\delta = r+1, \eta = s+1$)得出, 充分性由定理4.4.1 和引理4.2.2 (取$\delta = r, \eta = s$)得出.

推论4.4.1的证明： 证明过程同推论4.2.1.

推论4.4.2的证明： 证明过程同推论4.2.2.

定理4.4.4, 定理4.4.5, 定理4.4.6, 推论4.4.3和推论4.4.4分别与定理4.4.1, 定理4.4.2, 定理4.4.3, 推论4.4.1和推论4.4.2的证明类似, 此处省去.

5 二重三角级数的偏导函数与高阶Lipschitz函数类的关系

5.1 主要结果

假定二重非负数列$\{a_{jk}; j,k=1,2,...\}$ 满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} jka_{jk} < \infty, \tag{5.1.1}$$

则下列三角级数

$$f_{11}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin ix \sin jy,$$

$$f_{21}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix \sin jy,$$

$$f_{12}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin ix \cos jy,$$

$$f_{22}(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix \cos jy,$$

的混合偏导函数

$$\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x \partial y} := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} jka_{ij}\cos ix \cos jy,$$

$$\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial x \partial y} := -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} jka_{ij}\sin ix \cos jy,$$

$$\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x \partial y} := -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} jka_{ij}\cos ix \sin jy,$$

$$\frac{\partial^2 f_{22}}{\partial x \partial y} := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} jka_{ij}\sin ix \sin jy,$$

是一致收敛的，因此是连续的.

以下总假定$\{a_{jk}\}$满足(5.1.1). 本节只给出$\frac{\partial^2 f_{pq}}{\partial x \partial y} \in \Lambda_{r,s}(\omega), p,q=1,2$的充分条件和必要条件. 对更高阶的偏导数可以类似进行讨论.

定理5.1.1 若

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r+1}k^{s+1}a_{jk} = O\left(m^r n^s \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty} j^{r+1}ka_{jk} = O\left(m^r \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1.3}$$

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} jk^{s+1}a_{jk} = O\left(n^s \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1.4}$$

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} jka_{jk} = O\left(\omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1.5}$$

则

$$\frac{\partial^2 f_{pq}}{\partial x \partial y} \in \Lambda_{r,s}(\omega), p, q = 1, 2.$$

定理5.1.2 若$\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x \partial y} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$,

(i). 当r和s都为偶数时，则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r+1}k^{s+1}a_{jk} = O\left(m^r n^s \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1.6}$$

(ii). 当r 为偶数, s为奇数时, 则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r+1}k^{s+2}a_{jk} = O\left(m^r n^{s+1} \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1.7}$$

(iii). 当r 为奇数, s 为偶数时, 则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r+2}k^{s+1}a_{jk} = O\left(m^{r+1} n^s \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1.8}$$

(iv). 当r 和s 均为奇数时, 则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} j^{r+2}k^{s+2}a_{jk} = O\left(m^{r+1} n^{s+1} \omega\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.1.9}$$

定理5.1.3 若$\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial x \partial y} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$,

(i). 当r为奇数，s为偶数时，则有(5.1.6)成立.

(ii). 当r和s 都为奇数时, 则有(5.1.7)成立.

(iii). 当r 和s都为偶数时, 则有(5.1.8)成立.

(iv). 当r 为偶数，s 为奇数时, 则有(5.1.9)成立.

定理5.1.4 若$\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x \partial y} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$,

(i). 当r 为偶数，s 为奇数时, 则有(5.1.6)成立.

(ii). 当r和s 都为偶数时, 则有(5.1.7)成立.

(iii). 当r 和s都为奇数时, 则有(5.1.8)成立.

(iv). 当r 为奇数，s 为偶数时, 则有(5.1.9)成立.

定理5.1.5 若$\frac{\partial^2 f_{22}}{\partial x \partial y} \in \Lambda_{r,s}(\omega)$,

(i).当r和s都为奇数时，则有(5.1.6)成立.

(ii). 当r为奇数，s为偶数时, 则有(5.1.7)成立.

(iii). 当r为偶数，s 为奇数时, 则有(5.1.8)成立.

(iv). 当r 和s 都为偶数时, 则有(5.1.9)成立.

上述定理的证明可以结合第三章和第四章的方法进行, 在此略去.

参考文献

[1] G. G. Lorentz, Fourier-Koeffizienten and Funktionen Klassen, *Math. Z.*, **51**(1948), 135-149

[2] R. P. Boas Jr.,Fourier series with positive coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **17**(1967),463-483.

[3] L. Leindler, Strong approximation and classes of functions, *Mitteilungen Math. Seminar Giessen,* **132**(1978), 29-38.

[4] L. Leindler, Strong approximation and generalized Lipschitz classes, *Functional analysis and approximation* (Oberwohlfach,1980), Birkhäuser (Basel-Boston, 1981), (343-350).

[5] S. Yu. Tikhonov, Generalized Lipschitz classes and Fourier coefficient, *Math. Notes*, **75**(2004), 885-889.

[6] J. Németh, Notes on Fourier series with nonnegatives coefficients, *Acta Sci. Math.(Szeged)*, **55**(1991), 83-93.

[7] V. Fülöp, Double cosine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **70**(2004), 91-100.

[8] V. Fülöp, Double sine and cosine-sine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **70**(2004), 101-116.

[9] F. Móricz. Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions, *Acta Math. Hungar*, **121(1-2)**2008: 1–19.

[10] D. S. Yu, Double trigonometric series with positive coefficients, *Anal. Math.*, **35**(2009), 149-167.

[11] R. Q. Guo and D. S. Yu, Double trigonometric series and Zygmund classes of functions with two variables, *Bull. Math. Anal. Appl.*, **3**(2011), 201-212.

[12] F. Móricz, Higher order Lipschitz classes of funcyions and absolutely convergent Fourier series, *Acta Math. Hungar.*, **120**(2008), 355–366.

[13] 郭汝倩, 韦宝荣, 虞旦盛, 二重三角级数与二元Zygmund函数类, 浙江大学学报(理学版), 39(2012), 501-506.

[14] J. Németh, Fourier series with positive coefficients and generalized Lipschitz classes, *Acta Sci. Math.(Szeged)*, **54**(1990), 291-304.

[15] J. Németh, On Fourier series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math.(Szeged)*, **55**(1991), 95-101.

[16] F. Móricz. Absolutely convergent Fourier series and generalized Lipschitz classes, *Colloq. Math.*, **113**(2008),105-117.

[17] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series and function classes, *J. Math. Anal. Appl.*, **324**(2006), 1168-1177

[18] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series and function classes II, *J. Math. Anal. Appl.* **342**(2008), 1246-1249.

[19] V. Fülöp, Double sine series with nonnegative coefficients and Lipschitz classes, *Colloq. Math.*, **105**(2006), 25-34.

[20] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series, classsical functions classes and Paley's theorem, *Anal. Math.*, **34**(2008), 261-276.

[21] V. Fülöp, F. Móricz, and Z. Sáfár, Double Fourier transforms, Lipschitz and Zygmund classes of functions on the lane, *East J. Approx.*, **17**(2011), 111-124.

[22] G. Brown, F. Móricz and Z. Sáfár, Formal differentiation of absolutly convergent Fourier series and classical function classes, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **75**(2009), 161-173.

[23] Z. Sáfár, Abosolutly convergent double Fourier series and generalized multiplicative Lipschitz classes of functions, *Acta Sci. Math. (Szeged)* , **75**(2009), 617-633.

[24] A. Zygmund, Trigonometric Series, vol.I, *Cambridge Univ. Press*, 1939.

[25] R. Devore and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, *Springer Verlag*(Berlin), 1993.

[26] L. Y. Chan, On Fourier series with non-negative coefficients and two problems of R. P. Boas, *J. Math. Anal. Appl.*, **110**(1985), 116-129.

[27] S. P. Zhou, P. Zhou, D. S. Yu, The ultimate condition to generalize monotonicity for uniform convergence of trigonometric series, *Science in China: Mathematics*, **53**(2010), 1853-1862.

[28] L. Lendler, Strong approximation and generalized Zygmund class, *Acta. Sci. Math.*, **43** (1981), 301-309.

[29] L. Lendler, *Strong Approximation by Fourier Series,* kadémiai Kiadó (Budapest), 1985.

个人简历

基本情况

韩丹丹，女，河南驻马店人，1986年10月出生，杭州师范大学理学院研究生。

教育状况

2010年毕业于洛阳师范学院数学与应用数学专业

2013年毕业于杭州师范大学基础数学专业

硕士期间完成主要论文

韩丹丹，虞旦盛. 二重正弦级数与高阶Lipschitz函数类.

韩丹丹，虞旦盛. 正弦、余弦级数与高阶Lipschitz函数类.

韩丹丹，虞旦盛. 正弦-余弦、余弦-正弦、二重余弦级数与高阶Lipschitz函数类.